ISSN 0387-2963

昭和二十四年十一月二十四日 第三種郵便物認可
二〇一四年 三月 一 日発行（毎月一回一日発行）

會計

第185巻 3 月 号 第3号

東京 森山書店 発行

冪乗則と非線形モデルへの展開

坂上 学

一 はじめに

会計研究において用いられる会計数値の変動が、ガウス分布ないしは正規分布に従うという仮定は、長らく支配的な地位を占めていたように思う。しかしながら、少しばかり調べればすぐに分かることであるが、たとえば利益数値の変動は正規分布には従ってはいない。ほんの僅かな変動が大多数を占める一方で、バリュー・アット・リスク（以下ＶａＲ）を超えるような想定外とされる大きな変動が、かなりの頻度で発生しているからである[1]。それでは利益数値や株価の変動の実際の分布がどのようになっているかというと、裾野の厚いファットテール性が観察されるということである。この観察結果は、これらの数値が冪乗則に従うことを強く示唆している（Mandelbrot 2006）。

冪乗分布は、正規分布と並んで自然界や社会現象にしばしば見られる分布であり、経済学分野において、所得が、典型的な冪乗分布の一つであるパレート分布に従うことは広く知られている。企業規模をはじめとするいくつかの財務数値においても、パレート分布のような冪乗則に従うという観察結果は以前より報告されているが（Ijiri & Simon 1974；坂上 二〇一一）、あまり注目を浴びることはなかった。この点にもう一度注目

してみる必要があるのではないかというのが、本稿の第一の主張である。

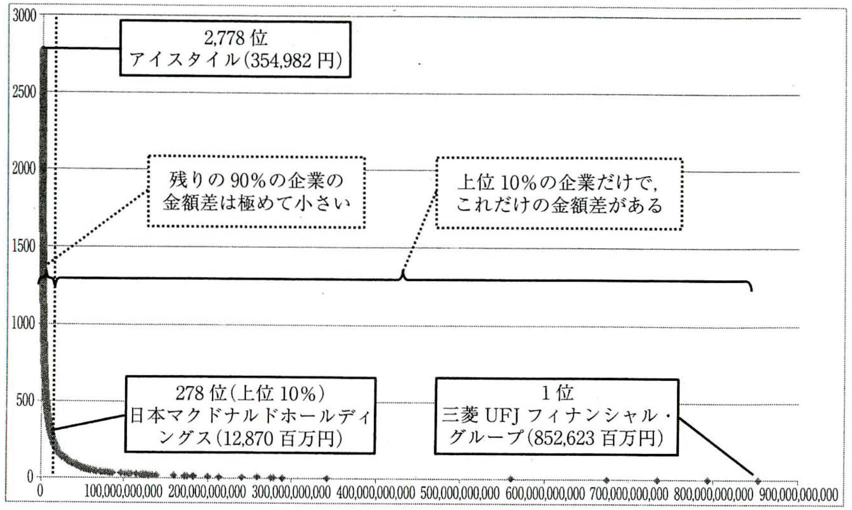
本稿では更に、財務データの分布が正規分布ではなく、冪乗則に従う場合、それは何を示唆しているのかについても考察する。結論を先取りして述べるならば、その背後にあるのは、非線形性である。つまり利益数値など冪乗分布を示す財務数値については、従来のように一次線形モデルだけを用いるのではなく、非線形モデルも視野に入れて研究する時期にそろそろ来ているのではないかというのが、本稿における第二の主張である。

これらを検討するにあたって、本稿では会計という仕組みを経て生成された会計情報そのものの振る舞いに注目する。これは、従来の会計研究とはやや異なり、会計処理などの規範的な方法や資本市場などを参照する記述的な方法ではなく、市場全体といったマクロな視点から会計情報の普遍的な性質に注目し、背後にある財務情報間の関係を明らかにするとともに、その背後に未知の原理が存在するかどうかを探索するというアプローチを取っている。

二　冪乗分布に従う会計数値の存在

企業の利益額の変動はランダムウォークし、それゆえ正規分布に従うものと暗黙裏に仮定され、さまざまな検証がなされることが多い。もし企業利益の変動が正規分布に従うとすると、利益数値の変動は平均値を中心に左右二・三シグマの範囲で約九九％をカバーすることになる。そして、それを超えるような変動は滅多に起きないことを仮定していることになる。企業の利益額は、企業規模により大小さまざまであるが、それぞれが正規分布をするのであれば、それぞれをすべて合成した市場全体の分布を見た場合、正規分布様の形状が観察されるはずである。すべての上場企業の利益額の分布を見渡すと、ある平均的な利益額というも

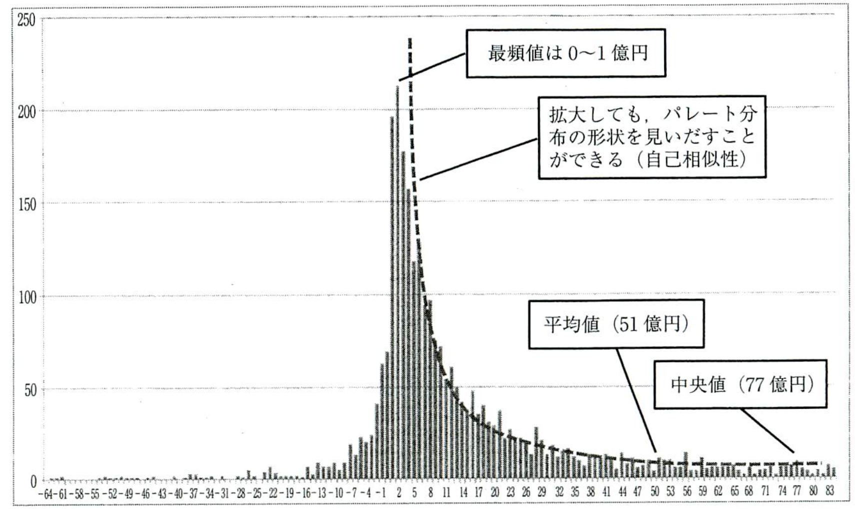
図表1　2012年4月～2013年3月期決算データ（当期純利益）の累積分布



のがあって、多くの企業はそのような平均的な利益を稼ぎ出し、それよりも大幅に多い金額を稼ぎ出す企業は少なく、またそれよりも大幅に少ない金額しか稼ぎ出すことができない企業も少ない、と漠然と思われるかもしれない。しかし、実際の市場全体の利益数値の分布は、このような直感的な予想とは大きく異なっている。

全上場企業の二〇一二年四月期～二〇一三年三月期決算データで、当期純利益を計上している二七七八社の累積分布を見てみると、三菱ＵＦＪフィナンシャル・グループの八五二六億円を筆頭に、上位一〇％に位置する日本マクドナルドホールディングスが一二八億円、最も少ない当期純利益を計上した企業はアイスタイルで約三五万円であった。累積分布（図表1）を見れば一目瞭然であるが、上位一〇％の企業の金額の差は非常に大きい一方で、下位九〇％の企業の金額差は極めて小さい。金額の幅だけで見ると、たった一・五％の範囲に九〇％の企業がひしめいているのである。平均値を計算してみると約七四・四億円となるが、グラフ全体から見れば、限りなくゼロに近いあたりに位置していることがわかる。こ

図表2　−65億円〜85億円付近の分布の詳細（1億円刻み）

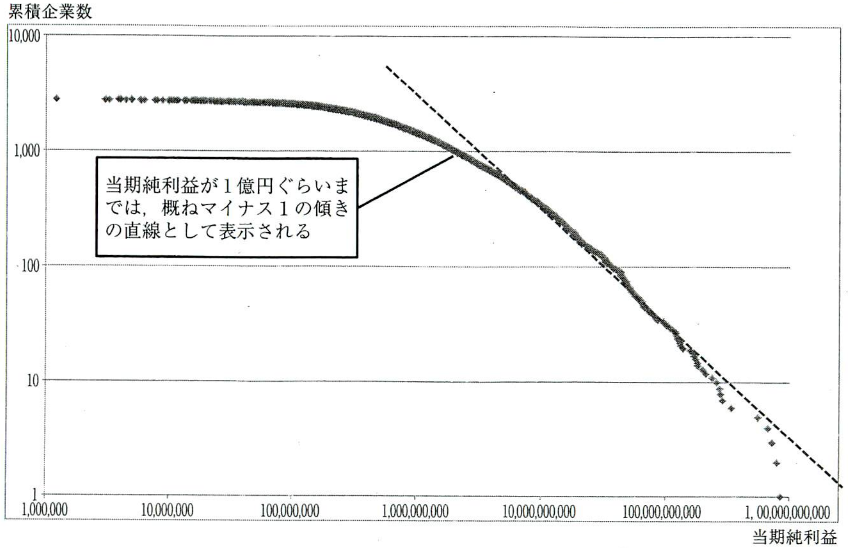


のような形状は、いわゆる「パレート分布」と呼ばれ、所得の分布を示すものとして広く知られている。そしてこのパレート分布は、冪乗分布の一種なのである。

さらに赤字を計上した企業も含めた全上場企業三二三七社のデータで見てみても、グラフ上ではゼロのあたりに多くの企業が集中している一方で、裾野が横に大きく広がったパレート分布の形をしている。赤字企業も含めた全企業の平均利益額は約五一・五億円、標準偏差は三九〇・八億円であり、最も大きな損失を計上している東京電力が六〇〇〇億円を超える大きな損失額であることを考えると、ゼロ付近の数%の範囲にほとんどの企業がひしめいているという点で、純損失額の分布も純利益額の分布と大きく変わることはない。

当期純利益額がゼロ付近の分布をもう少し詳しく見てみることにしよう（図表2）。マイナス六五億円～八五億円の範囲（全体の〇・九六%にすぎない）を一億円刻みヒストグラムで見てみると、最頻値は〇～一億円であり、ゼロを中心として左右にパレート分布様の形を観察することができる。ヒストグラムの階級間隔を変えても、同じ

図表3　2012年4月～2013年3月期決算データ（当期純利益）の累積両対数分布



ような形になるというスケール・フリー性（自己相似性）が見られるのは、冪乗分布の大きな特徴であり、利益数値の分布が冪乗則に従っていることの証左でもある。このたった一%にも満たないゼロ付近の範囲に、全上場企業の八五・九一%が集中しており、もはや正規分布を仮定することはできないほど尖度の高い分布となっている。ちなみに、平均値は約五一億円、中央値は約七七億円である。

パレート分布のような冪乗則に従う分布の場合、グラフ上にプロットした場合に非常に見づらいものとなるため、グラフの両軸を対数目盛とした両対数グラフの形で示すことがある。そこで、二〇一二年四月期～二〇一三年三月期決算データ（当期純利益）を累積両対数分布で表してみよう。すると利益額が一億円ぐらいまでは、概ねマイナス1の傾きの直線として表示されることが分かる（図表3）。両対数分布でマイナス1の傾きを持つということは、Ｚｉｐｆの法則が成り立っていることを意味している。そして、このＺｉｐｆの法則が成り立つということ

は、背後に何らかの普遍的な原理が働いていることを強く示唆しているのである。

Ｚｉｐｆの法則とは、出現頻度がｋ番目に大きい要素が全体に占める割合が１／ｋに比例するという経験則のことである。冪乗分布の一種で、離散型のパレート分布である。このＺｉｐｆの法則に従うと仮定すると、理論的には一〇位の企業の当期純利益は一位の企業の十分の一、百位の企業では百分の一、千位の企業では千分の一となることが予想される。実際にどのようになっているか、当期純利益額が十位、百位、千位の企業の数値にそれぞれの順位を掛け合わせた数字を算出してみたのが、図表４である。実際には傾きが完全にマイナス一ではないため、これらの値はすべて同じにはならない。また、これらの数字が大きく違うとみるか、それとも意外と差がないとみるかは判断が難しい。ただ正規分布に従うような場合、同様に数字を算出したとしても、桁数が異なるまったく違う数字となることを考えると、Ｚｉｐｆの法則がある程度当てはまると考えてよいのではないだろうか(2)。

図表４　順位×当期純利益の数値

順位	当期純利益額	順位×当期純利益
10	259,898,000,000	2,598,980,000,000
100	36,948,000,000	3,694,800,000,000
1,000	2,066,000,000	2,066,000,000,000

三　非線形モデルへの展開

利益や企業規模の数値の分布が冪乗則に従うこと、それ自体が注目すべき現象である。なぜなら、その背後に普遍的な原理が存在する可能性を示唆しているからだ。しかしながら、既存の会計理論は、「どのようにして利益を計算すべきか」については説明してくれるが、「なぜその結果として利益が冪乗分布に従うか」についてはいっさい説明してくれない。そこで新たな視点の会計研究が必要となる。

「なぜ一部の会計数値は冪乗分布となるのか」という問に対する答えとしては、その背後にあるモデルが一次結合の線形モデルではなく、多次元の非線形モデルである可能性を指摘しておきたい。実証研究などで

ごく普通に用いられるモデルのほとんどは、一次結合の線形モデルで表現される。この際に被説明変数がどのような分布特性を持っているかどうかについて十分な検討がなされずに、当然の事として線形モデルが用いられている。一次線形モデルで表現されるものは、基本的に正規分布に従うことになる一方で、多次元の非線形モデルで表現されるものは冪乗分布に従うことになる(3)。したがって、被説明変数として利益や企業規模を持ってくるような場合、その変動は冪乗則に従うことから、当然ながら説明変数側は変数を足し合わせた一次線形モデルではなく、変数を掛け合わせた非線形モデルを前提として検討しなければならないのではないかということが理解されるだろう。

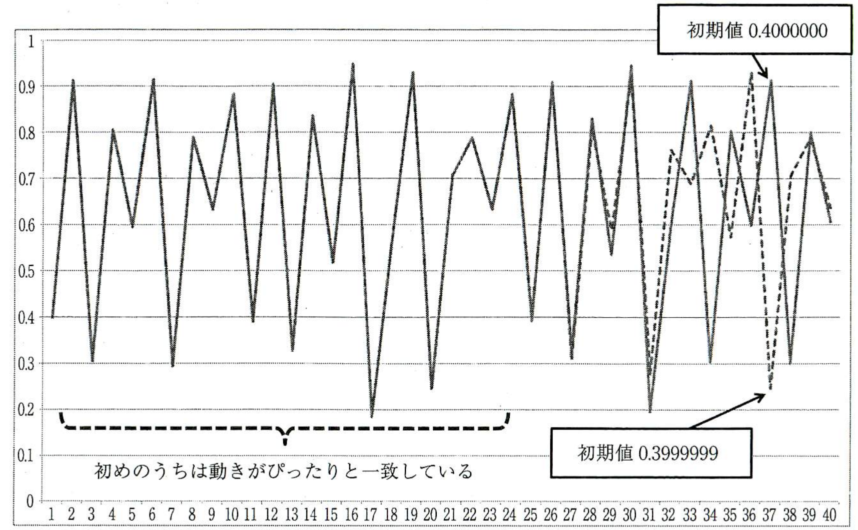
非線形モデルを扱う場合、我々はその振る舞いについて知っておかなければならない点がいくつかある。たとえばクリーン・サープラス関係に代表されるように、企業の資本金額は期首の資本金額をもとに一年間の経済活動を通じて得られた残余利益を加味して期末の資本金額が得られる。この期末の資本金額が、翌期の期首の金額となり、さらに一年間の経済活動を通じて得られた残余利益を加味して翌期末の資本金額となる、という関係が延々と繰り返されるが、このような繰り込み計算（ある関数を考え、一定の値を与えると算出される値が、次の入力値となるような計算を続けること）を行う場合、モデルの複雑さに関係なく、同じ構造と定数が支配していることを一九七五年にミッチェル・ファイゲンバウム（Mitchell Feigenbaum）が発見した（Gleick 1987）。このことを、最も単純な「ロジスティック写像」を用いて非線形モデルの振る舞いの特徴を見てみることにしよう。

ロジスティック写像は、次のような形をした非線形モデルである。

$$y=aX(1-X)$$

このロジスティック写像は、オーストラリア出身でイギリスの数理生物学者ロバート・メイ（Robert May）

図表５　初期値鋭敏性のシミュレーション（百万分の１の誤差）



が、生物の個体群（人間でいう人口）が複雑な振る舞いをすることを定式化したもので、aは係数を、Xは増加要因を、$(1-X)$は減少要因を、それぞれ表している。直感的には、Xの増大にともない、増加要因部分と減少要因部分とがやがて拮抗し、世代が進むにつれて一定の値に収束するように見えるが、実はこのロジスティック写像から得られる数値の振る舞いを支配しているのは、係数aなのである。具体的には、$a<3$の時は一定の値に収束し、$3<a<3.56995$の時は、複数の値を行ったり来たりする（振動をおこす）ようになる。さらに、$a>3.56995$の時に、いわゆる「カオス」が出現するようになるのである。カオスとは一般には無秩序を表す言葉として知られているが、物理学などでは決定論的法則に従いながら複雑な振る舞いをみせる現象（複雑系）を指す概念である。

カオスはまた初期値鋭敏性という性質が知られており、ほんの僅かな値の違いが大きく異なる結果をもたらす、いわゆるバタフライ効果がその特徴である。たとえば係数が三・八のロジスティック写像でシミュレ

ーションをしてみると、初期値鋭敏性が実際に発生することが簡単に観察できる。初期値として〇・四〇〇〇〇〇〇を与えた場合と、〇・三九九九九九九を与えた場合を比較してみる。この場合、〇・二〜〇・九ぐらいの範囲で値が変化していくが、たったの百万分の一の誤差がどのようになるかを見てみよう。最初の三十世代ぐらいまではほとんど同じ動きをするが、三十二世代あたりから動きが反転し、三十七世代では、初期値が〇・四〇〇〇〇〇〇の方が約〇・九なのに対し、初期値が〇・三九九九九九九の方は約〇・二とまったく異なる値を取るようになる（図表５）。

ロジスティック写像から分かることは、複雑な振る舞いを説明するのに複雑なモデルは必要ないということ、振る舞いを決定するのはモデルの複雑さではなく係数の値であること、係数がファイゲンバウム点を超えると、「カオス」が出現すること、最初の値がほんの僅かでも異なればその結果が大きく異なること、である。

四　利益数値の変動とカオス

現実の利益数値の変動は、ある値に収束したり、一定の周期性が発見されたりすることはなく、無秩序に推移しているように見えるため、これまでランダムウォークを仮定してきたといえよう。しかし、その変動が正規分布に従っていないため、その仮定を疑うべき時期に来ていると感じる。なによりも冪乗分布に従っている事実がその反証である。これまでの議論から、もし利益変動を非線形モデルで記述できるのであれば、その変動の無秩序としてカオスが出現している可能性が高い。そうであるならば、まずは非線形モデルの係数を探索するというのが、さしあたっての取り組むべき課題であろう。

カオスは無秩序であると述べたが、実は無秩序の中にもある一定の秩序というべきものが存在している。

それはカオス理論における「ストレンジ・アトラクタ」である。実際の数字を見ているだけでは、そこに何らかの秩序を見つけることはできない。カオス理論の嚆矢であるエドワード・N・ローレンツ（Edward N. Lorenz）は気象の観測値を連続的な変化としてとらえるのではなく、値が反転するピークに注目し、それが出現する時間間隔との関係を数列としてとらえ、その数列の性質を徹底的に調べたところ、ある秩序性があることを発見した。これは現在、ローレンツ・アトラクタとして知られている（蔵本 二〇〇七）。ストレンジ・アトラクタの発見は、現実世界の見方を大きく変え、そこには新たな分析手法の地平線が広がっていることを示唆している（Gleick 1987）。

このように書くと、会計数値の変動についてもストレンジ・アトラクタが発見できるのではないかという期待も出てくる。もしも利益数値がカオス的な振る舞いを見せるのであれば、ストレンジ・アトラクタが発見される可能性はある。しかし、現時点ではほぼ不可能であろう。それは時系列データが決定的に少なすぎるからである。当期純利益のデータの蓄積が進み、遠い将来において数百万や数千万というオーダーのデータが揃うことになれば、それらのデータを解析することによって、ストレンジ・アトラクタを発見することができるかもしれないが、それまで数百万年も待つわけにはいかないからだ。したがって当面は他の方法を模索しなければならない。

会計数値が年に一つ、四半期データを加えても年に四～五個程度しか入手できないという大きな制約のもとで、複雑な事象を検討するには、やや異なるアプローチをとる必要がある。一つの示唆は、最新の地震研究（本震直後の大きな余震のリアルタイム確率予測）の方法であろう。これは地震の規模と発生頻度が、グーテンベルク・リヒター則（これも冪乗則の一つ）に従うことを利用し、欠落したデータを統計学的に（ベイズ統計学を使う）補うことで、本震直後の大きな余震の予測をおこなうというものである（Omi et al 2013）。

非線形で複雑な振る舞いをするモデルの場合、解析的に解くということができないため、数値解析ないしはシミュレーションによって解かなければならない。しかし初期値鋭敏性がそれを不可能にしている。このことが、大きな変動（地震でいえば本震にあたる部分）の予測を不可能にしているのである。しかしながら、いったん大きな変動が観察されたのであれば、その後にどのような変動（地震でいえば余震にあたる部分）が発生するかについては、冪乗則に従うという特性を用い、膨大な計算を短時間でこなすことができれば、ある程度予測ができることを示されたわけである。これを応用すれば、会計数値がどのような冪乗則に従っているのかを明らかにし、ヒストリカル・データを駆使して膨大な計算を駆使することによって、会計数値に大きな変動があった場合の、その後の推移を予測できるかもしれない。ただし、予測が可能なのは、あくまでも大きな変動があった後の動きのみであり、冪乗則に従う事象は基本的に予測は不可能であることを十分に認識していなければならない。

五　おわりに

このような物理学の先端的な研究方法は、まだ経済学の分野にも十分に降りてきておらず、会計学領域ではまったくの手つかずの状態にある。しかしながらこれまでの研究方法の展開を振り返ってみると、物理学で確立した方法が、やがて経済学に導入され、それからしばらくして会計研究に下りてくるといった歴史を繰り返しているが、物理学のレベルでいえばまだニュートン力学の範囲内にとどまっているといえる。これを量子力学ではごく普通に扱われる冪乗則や非線形モデルの考え方を導入することで、会計研究にイノベーションをもたらす可能性は十分にあるといえるだろう。多くの研究者がこの領域に興味を持つことを期待したい。

注

（1）リーマン・ショック以降、ＶａＲの有効性を検証するためのバックテストにおいて、超過回数が激増しており、バーゼル委員会の三ゾーンアプローチ（Basle Committee on Banking Supervision 1996）でいうレッド・ゾーン（モデルに問題ありという状態）に陥っている。ＶａＲの有効性に対しては以前より理論上の問題点を指摘されていたが、その大きな理由は正規分布を仮定している点にある（山井・吉羽 二〇〇一）。

（2）利益数値の他にも、企業の規模を表す数値、たとえば資産総額や純資産額などについても、両対数累積分布でマイナス1の傾きを持つ直線が観察され、Ｚｉｐｆの法則が成り立っているといえる。

（3）このことは、簡単なシミュレーションで確認することができる。三つの変数について標準正規乱数を五千回発生させ、それぞれを「足し算」した場合と「掛け算」した場合のヒストグラムを比較してみればよい。各変数を足し合わせた一次線形モデルの場合は正規分布に従い、大きく外れる数値がほとんどない。その一方で、各変数を掛け合わせた非線形モデルの場合は、ゼロを中心に左右対称のパレート分布様の形となり、大きく外れた値も存在する冪乗則に従い、大きく外れた値も発生するのである。

参考文献

Basle Committee of Banking Supervision (1996), *Supervisory Framework For The Use of "Backtesting" in Conjunction With The Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements.* (http://www.bis.org/publ/bcbs22.pdf)

Buchanan, M. (2000), *The Ubiquity : The Science of History or Why the World is Simpler Than We Think*, Weidenfeld & Nicolson.（水谷淳訳［二〇〇九］『歴史はべき乗則で動く―種の絶滅から戦争までを読み解く複雑系科学』早川書房）

Gleick, J. (1987) *Chaos : Making a New Science*, Penguin Books.

Ijiri, Y. and Simon, H.A. (1974) "Interpretations of departures from the Pareto Curve firm-size distributions," *Journal of Political Economy*, 82 : 315-332.

Mandelbrot, B. & Hudson, R.L. (2006) *The Misbehavior of Markets : A Fractal View of Financial Turbalence*, Basic Books.（高安秀樹・雨宮絵里・高安美佐子・冨永義治・山崎和子訳（二〇〇八）『禁断の市場　フラクタルでみるリスクとリターン』東洋経済新報社）

Omi, T., Ogata, Y., Hirata, Y., & Aihara, K. (2013) "Forecasting large aftershocks within one day after the main shock," *Scientific Reports* 3, Article number : 2218. (URL : http://www.nature.com/srep/2013/130717/srep02218/full/srep02218.html)

蔵本由紀（二〇〇七）『非線形科学』集英社新書。

坂上　学（二〇一一）「財務数値の分布特性とベキ乗則」『會計』一八〇（三）：三二六―三三八。

高安秀樹（二〇〇四）『経済物理学の発見』光文社。

山井康浩・吉羽要直（二〇〇一）「バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について―理論的サーベイによる期待ショートフォールとの比較分析―」『金融研究』二〇（一）：三三―六八。

（付記）本稿は、日本会計研究学会第七十二回全国大会（於：中部大学）における統一論題第三会場における報告に加筆修正したものである。
また本研究は、科学研究費補助金基盤研究史（Ｃ）「財務会計情報の分布特性と解析手法の探求」（課題番号 25380620）による研究成果の一部である。

（筆者・法政大学教授）